Universität Karlsruhe (TH)

Institut für Programmstrukturen und Datenorganisation (IPD)

Informatik I WS 2003/04 http://www.infoeins.de

Dozent: Prof. Dr.rer.nat. G. Goos goos@ipd.info.uni-karlsruhe.de

Übungsleiter: Tom Gelhausen gelhausen@fzi.de

Musterlösung 5 - (60T / 0P)

Ordnungen und Verbände

Ausgabe: 14.11.2003

Abgabe: 21.11.2003 13:30 Uhr

Einwurf im Keller des Informatik-Hauptbaus (Geb. 50.34)

1. Halbordnungen und Funktionen (17T)

Sei A = {a, b} und M = **P**(A)^3 das dreifache Kreuzprodukt der Potenzmenge. Weiter sei folgende Halbordnung über M gegeben: $(X_1, X_2, X_3) \sqsubseteq (Y_1, Y_2, Y_3)$ gdw. $X_1 \subseteq Y_1$, $X_2 \subseteq Y_2$, $X_3 \subseteq Y_3$

1.1. Grundlagen (6T)

Geben Sie **P**(A) sowie ein Element aus M an.

Prüfen Sie, ob folgende Aussagen wahr sind:

a. ({a}, {b}, ∅) ⊑ ({a,b}, {b}, {a})
b. ({b}, {b}, ∅) ⊑ ({a,b}, {a}, {a})
c. ({a}, {b}, {a,b}) ⊑ ({a,b}, ∅, {a})
d. (∅, ∅, ∅) ⊑ ({a}, {b}, {a})

Welches ist das kleinste Element ⊥ der Halbordnung? Welches das größte ⊤?

Lösung:

P(A) = { ∅, {a}, {b}, {a, b} }

Ein Element aus M ist jedes Drei-Tupel von Elementen aus **P**(A), z.B. ({a}, {a}, {a, b})

a. ja
b. nein
c. nein
d. ja

Kleinstes Element: ⊥ = (∅, ∅, ∅)
Größtes Element: ⊤ = (A, A, A)

Hinweis zu Korrektur:

Potenzmenge:	1T
Element aus M:	1T
a. – d.	je 0,5T
Kleinstes Element:	1T
Größtes Element:	1T

1.2. Eigenschaften der Halbordnung (6T)

Ist obige Halbordnung (i) fundiert, (ii) artinsch, (iii) noethersch, (iv) vollständig? Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen kurz.

Lösung:
artinsch: ja, da M endlich
fundiert: ja, da artinsch
noethersch: ja, da M endlich
vollständig: ja, da M ein kleinstes Element $\perp$ hat und noethersch ist (da jede aufsteigende Kette abbricht, hat sie auch ein Supremum)

1.3 Fixpunkte (5T)

Sei nun zusätzlich Funktion f über M gegeben:

$$f((X_1, X_2, X_3)) = (X_2 \setminus \{a\}, X_3 \cup \{b\}, X_1 \cup X_2 \cup \{a\})$$

Ist f (i) monoton, (ii) stetig? Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen kurz.
Finden Sie den kleinsten Fixpunkt der Funktion f.

Lösung:
monoton: (2T) Sei $m_1 = (X_1, X_2, X_3) \sqsubseteq m_2 = (Y_1, Y_2, Y_3)$, d.h. $X_1 \subseteq Y_1, X_2 \subseteq Y_2, X_3 \subseteq Y_3$

Es gilt:
$f((X_1, X_2, X_3)) = (X_2 \setminus \{a\}, X_3 \cup \{b\}, X_1 \cup X_2 \cup \{a\}) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$
$f((Y_1, Y_2, Y_3)) = (Y_2 \setminus \{a\}, Y_3 \cup \{b\}, Y_1 \cup Y_2 \cup \{a\}) = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$

$\xi_1 = X_2 \setminus \{a\} \subseteq \eta_1 = Y_2 \setminus \{a\}$, da $X_2 \subseteq Y_2$
$\xi_2 = X_3 \cup \{b\} \subseteq \eta_2 = Y_3 \cup \{b\}$, da $X_3 \subseteq Y_3$
$\xi_3 = X_1 \cup X_2 \cup \{a\} \subseteq \eta_3 = Y_1 \cup Y_2 \cup \{a\}$, da $X_1 \subseteq Y_1, X_2 \subseteq Y_2$

$\Rightarrow m_1 \sqsubseteq m_2 \Rightarrow f(m_1) \sqsubseteq f(m_2)$

stetig: (1T) Betrachte beliebige Kette K aus M: $m_1 \sqsubseteq m_2 \sqsubseteq \ldots \sqsubseteq m_n$, endlich, da M endlich
Wegen Monotonie folgt für f(K): $f(m_1) \sqsubseteq f(m_2) \sqsubseteq \ldots \sqsubseteq f(m_n)$

Es gilt $\sup(K) = m_n$ und damit $f(\sup(K)) = f(m_n)$.
Außerdem gilt $\sup(f(K)) = f(m_n)$
$\Rightarrow \sup(f(K)) = f(\sup(K))$

Finden des Fixpunktes (2T):
$\perp = (\varnothing, \varnothing, \varnothing)$
$f^1(\perp) = (\varnothing, \{b\}, \{a\})$
$f^2(\perp) = (\{b\}, \{a, b\}, \{a, b\})$
$f^3(\perp) = (\{b\}, \{a, b\}, \{a, b\})$

$x = (\{b\}, \{a, b\}, \{a, b\})$ ist also kleinster Fixpunkt von f.

2. Hassediagramme (15T)

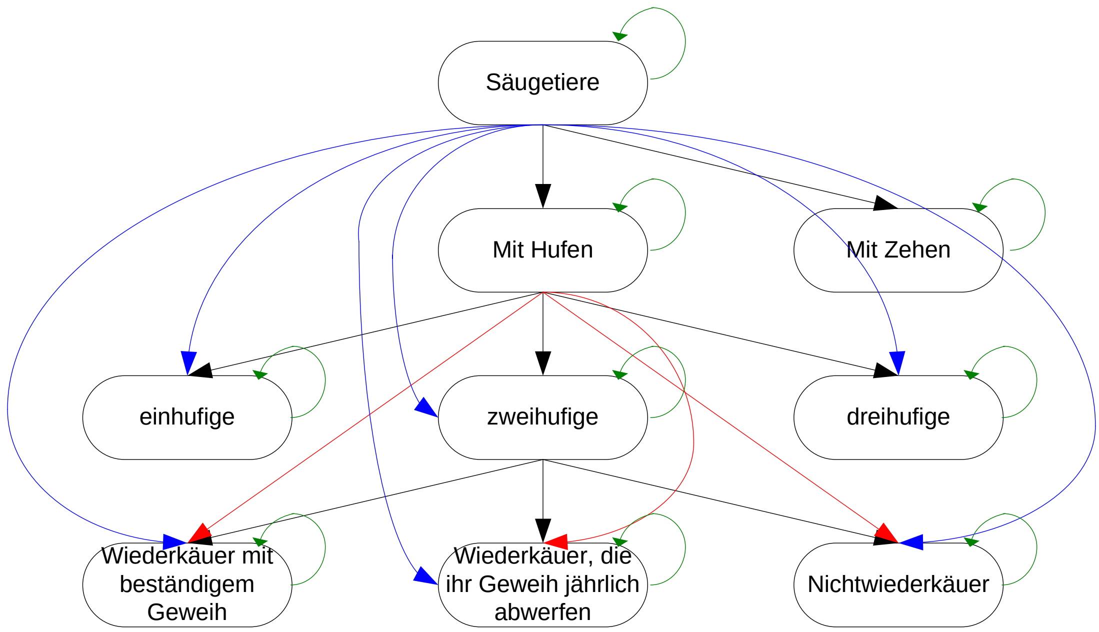
Aus einem Biologiebuch:
„Zum Beispiel teilte er *Säugetiere* in zwei große Gruppen: in solche *mit Zehen* (z.B. Katzen) und solche *mit Hufen*. Die behuften Tiere teilte er weiter in *einhufige* (Pferde), in *zweihufige* (Hornvieh) und in *dreihufige* (Rhinozerosse) ein. Die zweihufigen Säugetiere wurden weiter in drei Gruppen eingeteilt: in *Wiederkäuer mit beständigem Gehörn* (Ziegen u.a.), in *Wiederkäuer, die ihr Gehörn jährlich abwerfen* (Rotwild) und *Nichtwiederkäuer* (Schweine).“

2.1 Halbordnung (8T)

Erstellen Sie aus obigem Text die Halbordnung „ist allgemeiner als“, die die Verwandtschaftsbeziehungen zwischen den Tieren verdeutlicht. Die Halbordnung soll dabei als Graph dargestellt werden.

Hinweis 1: alle kursiven Worte gehören zur zu betrachtenden Menge.
Hinweis 2: Denken Sie dabei an die Eigenschaften einer Halbordnung.

Lösung:



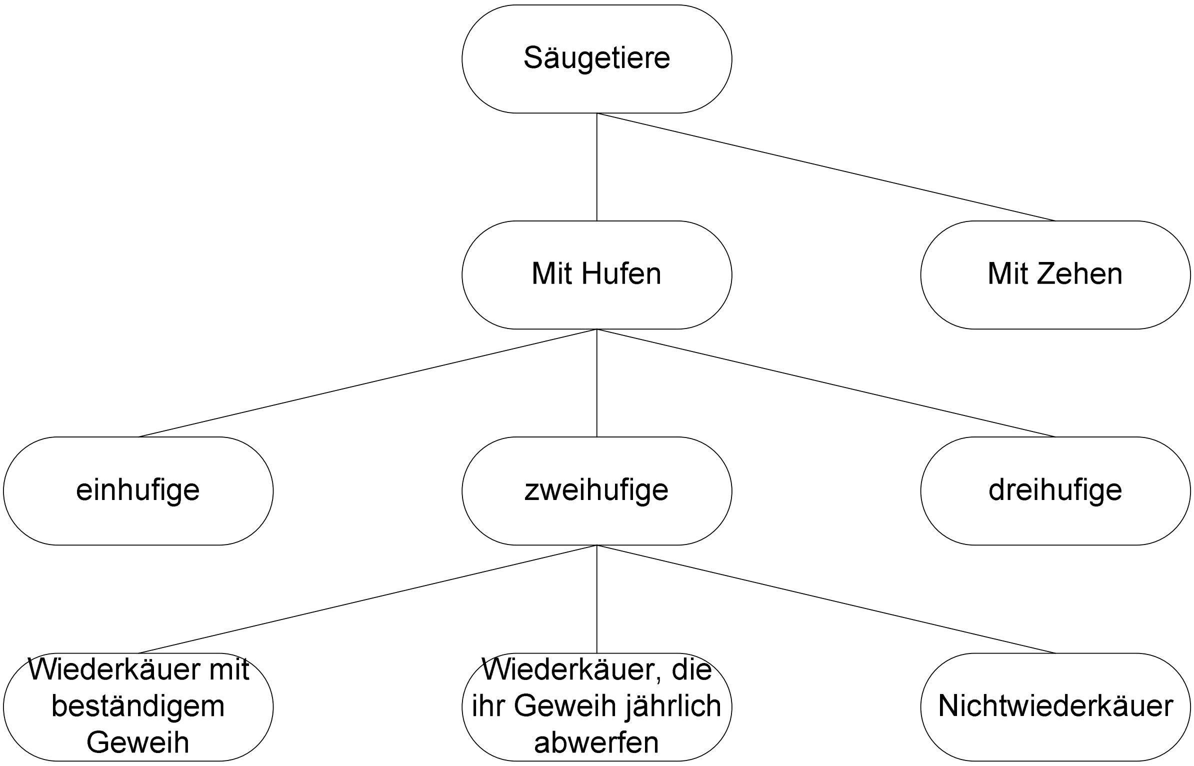
Hinweis zur Korrektur:
2T Alle Knoten
2T reflexive Kanten
2T transitive Kanten
2T „normale“ Kanten

2.2 Hassediagramm (5T)

Formen Sie den Graphen aus 2.1 in ein Hassediagramm um. (4T)

Welchen Vorteil hat die Darstellung der Halbordnung als Hassediagramm gegenüber der Darstellung als Graph? (1T)

Lösung:



Das Hasse-Diagramm ist übersichtlicher, da reflexive und transitive Kanten nicht eingezeichnet werden müssen.

2.3 Topologisches Sortieren (2T)

Sortieren Sie die Halbordnung topologisch (beginnend mit dem allgemeinsten Element).

Lösung:
Es gibt mehrere korrekte Lösungen, eine mögliche ist z.B.:

L = [Säugetiere, mit Zehen, mit Hufen, einhufige, zweihufige, dreihufige, Wiederkäuer mit beständigem Gehörn, Wiederkäuer, die ihr Gehörn jährlich abwerfen, Nichtwiederkäuer]

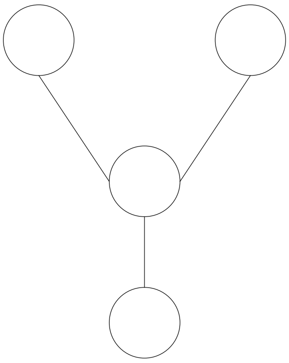
3. Verbände (17T)

3.1 Verbände erkennen (10T)

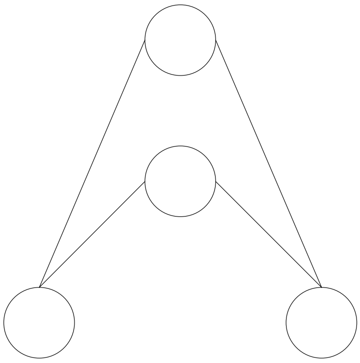
Gegeben sind folgende Diagramme. Untersuchen Sie jeweils, ob es sich um einen oberen/unteren Halbverband oder einen Verband handelt (je 1,5T). Ergänzen Sie, wenn nötig, den Halbverband durch maximal einen Knoten zu einem Verband (je 1,5T).

Sind alle diese Verbände vollständig (kurze Begründung)? (1T)

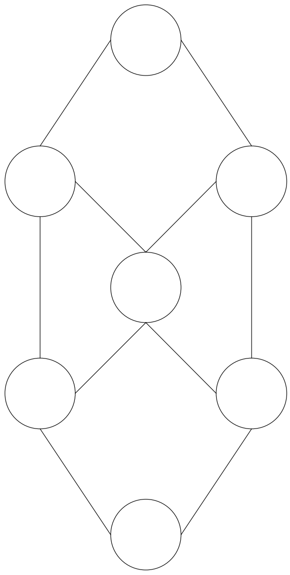
1.



2.

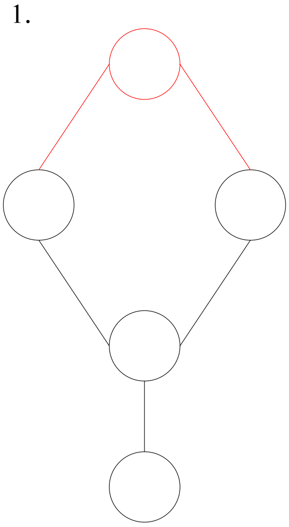


3.



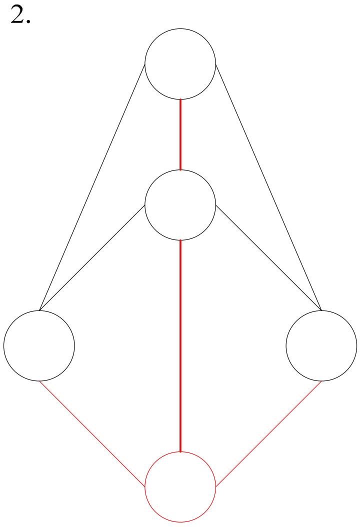
Lösung:
Ergänzungen zum Verband sind rot eingezeichnet.

1.



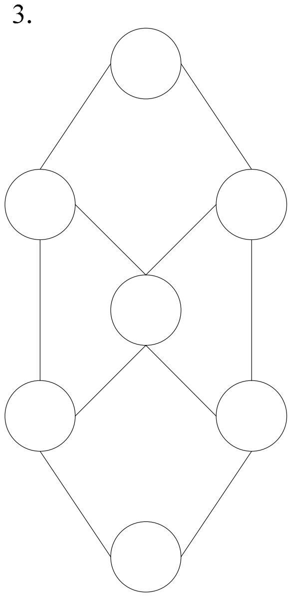
Unterer Halbverband

2.



Kein Verband

3.



Verband

Ja, alle hier gezeigten Verbände sind vollständig, da sie endlich sind.

3.2 Zusammenhang zwischen Verbände und Ordnungen (7T)

Gegeben sei ein Halbverband $(U, \wedge)$. Zeigen Sie, dass auf U durch $x \leq y$ gdw. $x \wedge y = x$ eine Halbordnung $(U, \leq)$ definiert wird.

Hinweis: Überprüfen Sie dazu die Eigenschaften einer Halbordnung.

Lösung:

Zu zeigen sind folgende Eigenschaften:

Reflexivität: Es soll gelten $x \leq x$,
erfüllt da im Halbverband Idempotenzgesetz gilt ($x \wedge x = x$)

Transitivität: Wenn $x \leq y$ und $y \leq z$ dann $x \leq z$,

$x \leq y \quad \Rightarrow \quad x \wedge y = x$

$y \leq z \quad \Rightarrow \quad y \wedge z = y$

mit Hilfe der Assoziativität im Halbverband folgt:

$x \wedge z = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y = x \Rightarrow x \leq z$

Antisymmetrie: Wenn $x \leq y$ und $y \leq x$ dann $x = y$,

$x \leq y \quad \Rightarrow \quad x \wedge y = x$

$y \leq x \quad \Rightarrow \quad y \wedge x = y$

Hieraus folgt direkt mit der Kommutativität des Halbverbandes $x = y$.

4. Ordnungsrelationen (11T)

Welche Eigenschaften muss eine Relation R erfüllen, um eine Ordnungsrelation zu sein? (1T)

Geben Sie an, ob die Relationen auf den jeweiligen Mengen Ordnungsrelationen sind. Wenn ja, weisen Sie **kurz** die Eigenschaften nach und geben Sie an, ob es sich um eine totale Ordnung oder eine Halbordnung handelt. Wenn nein, begründen Sie **kurz** warum nicht.

a. Relation '<' (kleiner als) auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$
b. Relation '|' (teilt) auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$
c. Relation zwischen natürlichen Personen „ist verwandt mit".
d. Relation „ist Mutter von" bei Menschen.
e. Relation zwischen natürlichen Personen „ist nicht kleiner als".
f. Relation „ist echte Teilmenge von" auf der Potenzmenge einer nichtleeren Menge.

Lösung:
Die Relation muss reflexiv, antisymmetrisch und transitiv sein.

Lösung:

a. $(\mathbb{N}, <)$ ist keine Ordnungsrelation,
da $<$ z.B. nicht reflexiv ist.

b. $(\mathbb{Z}, |)$ ist keine Ordnungsrelation,
z.B. gilt 4 teilt 16 und -4 teilt 16, aber $4 \neq -4$. Also ist die Relation nicht antisymmetrisch.

c. „ist verwandt mit" ist keine Ordnungsrelation,
da nicht antisymmetrisch.

d. „ist Mutter von" ist keine Ordnungsrelation,
da nicht reflexiv.

e. „ist nicht kleiner als" ist keine Ordnungsrelation,
denn „Person A ist nicht kleiner als Person B" ist auch erfüllt, wenn Person A genauso groß ist, wie Person B. Aber Person A ist damit nicht automatisch Person B, also ist die Relation nicht antisymmetrisch.

f. „ist echte Teilmenge von" ist keine Ordnungsrelation,
da nicht reflexiv.